

一様静磁場下における液体金属の 自由表面流れの数値シミュレーション

首都大学東京 システムデザイン学部
航空宇宙システム工学コース

田川俊夫

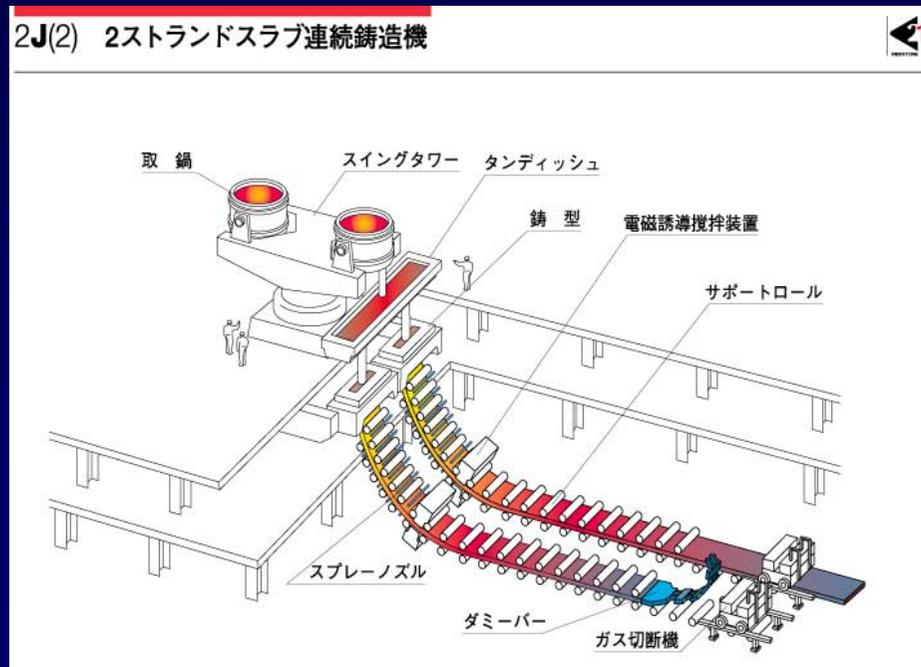
Reference: T. Tagawa, “Numerical Simulation of Liquid Metal Free-surface Flows in the Presence of a Uniform Static Magnetic Field”, *ISIJ International*, Vol. 47 (2007), No. 4 (April)

Research background

材料電磁プロセッシング（鉄鋼業における連続鋳造プロセス； 半導体単結晶成長）

高温融体の熱物性測定（電磁浮遊法）

熱核融合炉への応用（ブランケット）



実験装置

放射温度計
高速度カメラ
シリコン融液は雰囲気酸素分圧の影響を受けるため、温度、試料を観察しながら酸素分圧を制御する実験系を構築しました。

コイル

電磁浮遊の原理

コイルが作る高周波磁場と試料に発生する渦電流によりローレンツ力が発生、浮遊力となります。

磁力線
ローレンツ力
浮遊するシリコン融液
浮遊コイル

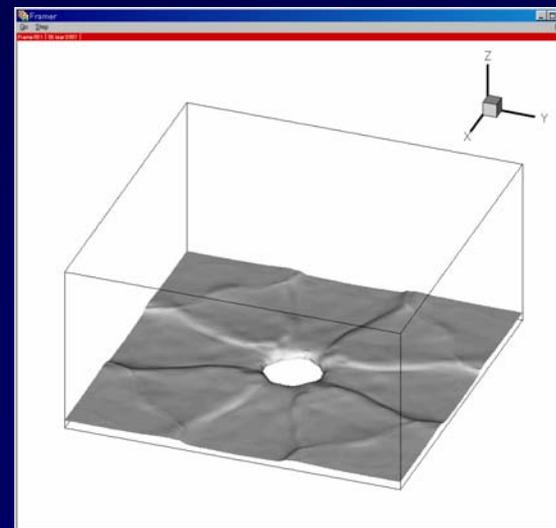
http://www.jfe-21st-cf.or.jp/jpn/chapter_2/2j_2.html

首都大学東京 日比谷研究室 HPより

http://astan3.tmit.ac.jp/research/res_eml.html

Introduction

- ❖ 材料の品質保証には、熱流動場の正確な把握が必要で、そのための一つの方法として、磁場印加により、流れの制御（抑制や攪拌）が行われている。
- ❖ 自由表面流れの駆動力は、重力、表面張力（マランゴニ効果を含む）であり、また、内部対流の駆動力は、温度や濃度差に起因する密度差、そして介在物の影響もある。
- ❖ 上記のような流れは、様々な外力が含まれるため非常に複雑で、ここでは、熱の影響を考慮しない自由表面流れについて数値解析的に考察する。
- ❖ 右図は、自由表面流れの解析例であり、以下、基礎式、計算方法、計算結果について言及する。



（自由表面流れの計算例）

Comparison between buoyant convection and two-phase flow

	支配方程式	変数
浮力熱対流(単相) (μ : constant) ($\rho(\theta)$: Boussinesq近似)	N-S 方程式	\vec{u}
	エネルギー方程式	θ
非圧縮、非混合の等温度場の二相流 ($\mu(\phi), \rho(\phi)$: 変数)	N-S 方程式 (界面張力を含む)	\vec{u}
	移流方程式 (拡散項なし)	ϕ

二相流における相の識別関数 ϕ は、浮力対流における温度 θ に対応する。 Boussinesq近似は使えない。

Governing equations (dimensional)

非圧縮、非混合、等温場における基礎式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho g \vec{e}_z + \vec{f}_{EM} + \vec{f}_{ST}$$

電磁力 $\vec{f}_{EM} = \vec{j} \times \vec{b},$

界面力 $\vec{f}_{ST} = \gamma \kappa \frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho_L - \rho_G}$ CSFモデル

Induction equation

Maxwellの方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial \vec{b} / \partial t$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_m \vec{j}$$

Ohmの法則

$$\vec{j} = \sigma (\vec{e} + \vec{u} \times \vec{b})$$

両式から j を消去し、rot をとる

$$\vec{\nabla} \times \left[\sigma (\vec{e} + \vec{u} \times \vec{b}) \right] = \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_m} \vec{\nabla} \times \vec{b} \right]$$

磁場の拡散が
支配的

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu_m \nabla^2 \vec{b},$$

$$\left(\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu_m} \right)$$

$$\text{Re}_m = \frac{u_0 d}{\nu_m} \ll 1, \quad \text{Re}_m = \text{Re} \cdot \text{Pr}_m \quad \left(\text{Pr}_m = \frac{\nu}{\nu_m} \cong 10^{-7} \right)$$

Electromagnetic force

磁場の変化をゼロと仮定(誘導磁場の無視)

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{e} = -\vec{\nabla} \psi$$

電流密度 j はOhmの法則により求め、電荷保存則を満足させるように電位 ψ を求める

$$\vec{j} = \sigma \left(-\vec{\nabla} \psi + \vec{u} \times \vec{b} \right), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

したがって、流体に作用するLorentz力(電磁力)は、

$$\vec{f}_{EM} = \vec{j} \times \vec{b} = \sigma \left(-\vec{\nabla} \psi + \vec{u} \times \vec{b} \right) \times \vec{b}$$

ψ : 電位

b : 印加された静磁場ベクトル

σ : 導電率 (ϕ に依存)

Modeling of surface tension (1)

CSFモデル (Brackbill *et. al.* 1992)によれば、界面法線力として

$$\vec{f}_{ST} = \gamma \kappa \frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho_L - \rho_G}$$

γ : 表面張力
 κ : 界面平均曲率

で与えられる体積力(面積力ではない)を N-S 方程式に組み込むことで計算できる。一方、密度の移流方程式を計算する代わりに、以下の式を用いる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \phi = 0$$

このことにより、たとえ等密度の二相流の計算でも、相を識別できる。第一の相(液相)を $\phi = -0.5$ 、第二の相(気相)を $\phi = 0.5$ とする。液相を -0.5 (密度大)、気相を 0.5 (密度小) とした理由は、自然対流コードとの対比から決定

Modeling of surface tension (2)

ϕ の値は、相の種類に応じて -0.5 か +0.5 であるが、実際の移流計算の際には、数値拡散による界面のぼやけの為、中間値をとる格子点が現れる。そこで、識別関数 ϕ と密度 ρ の関係を、例えば、以下のように決める。

$$\phi = -\frac{\rho - 0.5(\rho_L + \rho_G)}{\rho_L - \rho_G} \quad \text{or}$$

$$\rho = 0.5(\rho_L + \rho_G) - (\rho_L - \rho_G)\phi$$

上の式からは、 ϕ は無次元化された密度とみなすことができる。上記の場合、液相から気相の間の ϕ に対する密度変化が直線的であるため、次式のようになめらかな変化であることが望ましい。これには、界面に働く法線力が不連続にならなくすると同時に、数値拡散による界面のぼやけを低減する効果(逆拡散)がある。

$$\rho = 0.5(\rho_L + \rho_G) - (\rho_L - \rho_G) \left[\phi + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi) \right]$$

Modeling of surface tension (3)

識別関数 ϕ と密度 ρ の関係

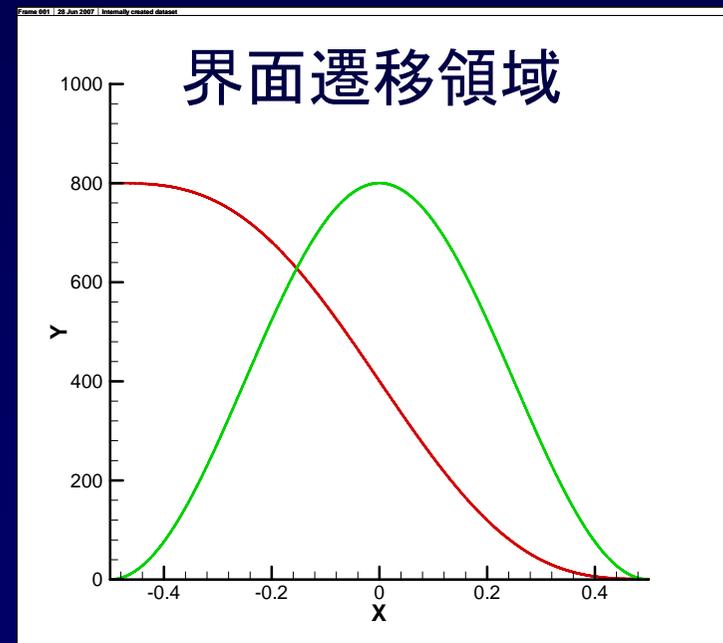
$$\rho = 0.5(\rho_L + \rho_G) - (\rho_L - \rho_G) \left[\phi + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi) \right]$$

から、界面法線力は、

$$\vec{f}_{ST} = \gamma \kappa \frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho_L - \rho_G} = -\gamma \kappa [1 + \cos(2\pi\phi)] \vec{\nabla} \phi = -\gamma \kappa \delta_\phi \vec{\nabla} \phi$$

これで、有限厚さの界面においてのみ、界面法線力が働くのがわかる。なお、界面平均曲率は、界面法線単位ベクトルの div をとることから得られる。

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|} \right)$$



Governing equations (non-dimensional)

連続の式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

運動方程式

$$\frac{D\vec{U}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho_\phi} \vec{\nabla} P + \frac{\mu_\phi}{\rho_\phi} \nabla^2 \vec{U} - G \vec{e}_z + \frac{\hat{\mu}}{\rho_\phi} Ha^2 \vec{J} \times \vec{B}$$

Gravity force ρ_ϕ Lorentz force

$$-\frac{\Gamma}{\rho_\phi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|} \right) (1 + \cos(2\pi\phi)) (\vec{\nabla} \phi)$$

Surface tension (CSF model)

電荷保存則

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \phi = 0$$

Ohmの法則

$$\vec{J} = \sigma_\phi \left(-\vec{\nabla} \Psi + \vec{U} \times \vec{B} \right)$$

Parameters of the present computation

$$(X, Y, Z) = \frac{(x, y, z)}{d}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{(\mu_G / \rho_G d)}, \quad P = \frac{p}{(\mu_G^2 / \rho_G d^2)},$$

$$\tau = \frac{t}{(\rho_G d^2 / \mu_G)}, \quad Ha = \sqrt{\frac{\sigma_L}{\mu_L}} b_0 d, \quad G = \frac{g \rho_G^2 d^3}{\mu_G^2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma \rho_G d}{\mu_G^2}$$

✦ 界面における無次元の物性値

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\phi = \frac{\rho}{\rho_G} = \frac{1}{2}(\hat{\rho} + 1) - (\hat{\rho} - 1) \left[\phi + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi) \right], \quad \hat{\rho} = \frac{\rho_L}{\rho_G} \\ \mu_\phi = \frac{\mu}{\mu_G} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + 1) - (\hat{\mu} - 1) \left[\phi + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi) \right], \quad \hat{\mu} = \frac{\mu_L}{\mu_G} \\ \sigma_\phi = \frac{\sigma}{\sigma_L} = \frac{1}{2}(1 + \check{\sigma}) - (1 - \check{\sigma}) \left[\phi + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi) \right], \quad \check{\sigma} = \frac{\sigma_G}{\sigma_L} \end{array} \right.$$

Computational strategy

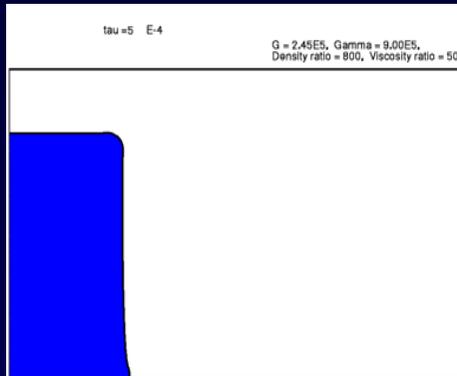
支配方程式は、等間隔スタaggerドメッシュ上で、差分法によって解く

- 圧力項: HSMAC 法
- 電位項: HSMAC 法
- 移流項(運動方程式): 三次精度風上差分法
- 移流方程式: 三次精度風上差分法
- その他: 二次精度中心差分法

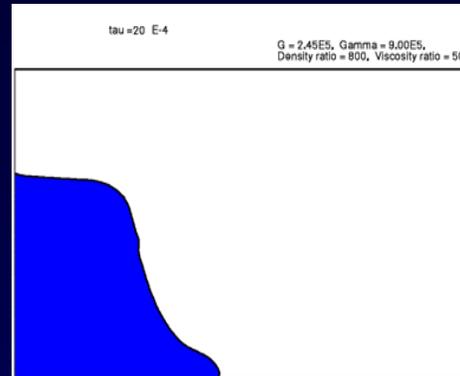
Algorithm

1. 運動方程式を時間積分して、速度の予測値を計算 (ϕ に依存する密度や粘度を予め計算)
2. $\text{Div } \mathbf{U} = 0$ になるよう、圧力場と速度場の同時修正
3. 修正速度を用いて移流方程式を計算し、 ϕ の分布を求める
4. 修正速度を用いて、電流密度の予測値を計算 (ϕ の値に依存する導電率を予め計算)
5. $\text{Div } \mathbf{J} = 0$ になるよう、電位と電流密度を同時修正

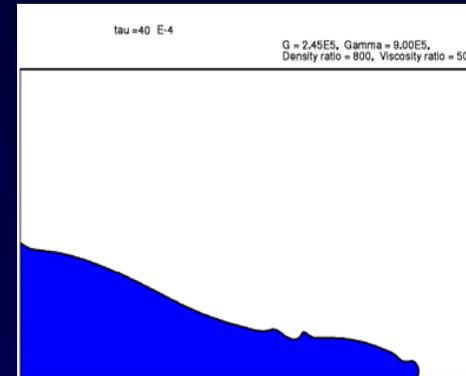
Collapse of water column (2D computation)



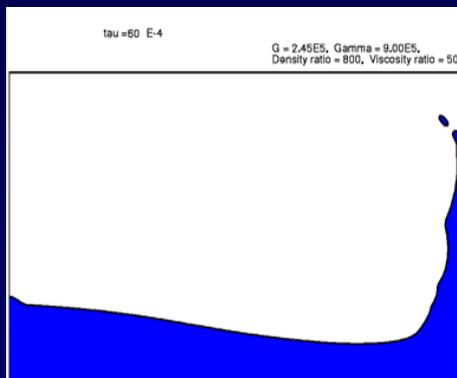
$\tau = 0.0005$



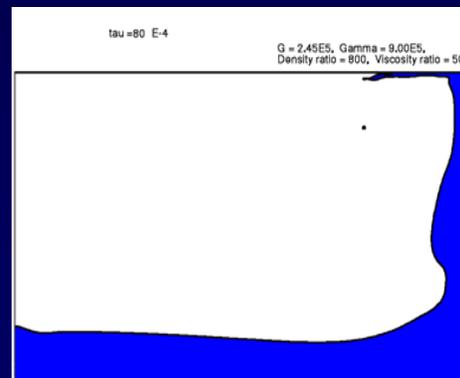
$\tau = 0.002$



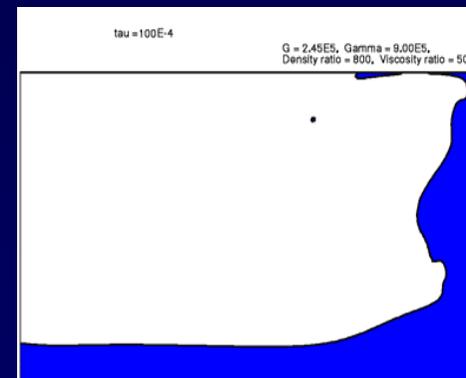
$\tau = 0.004$



$\tau = 0.006$



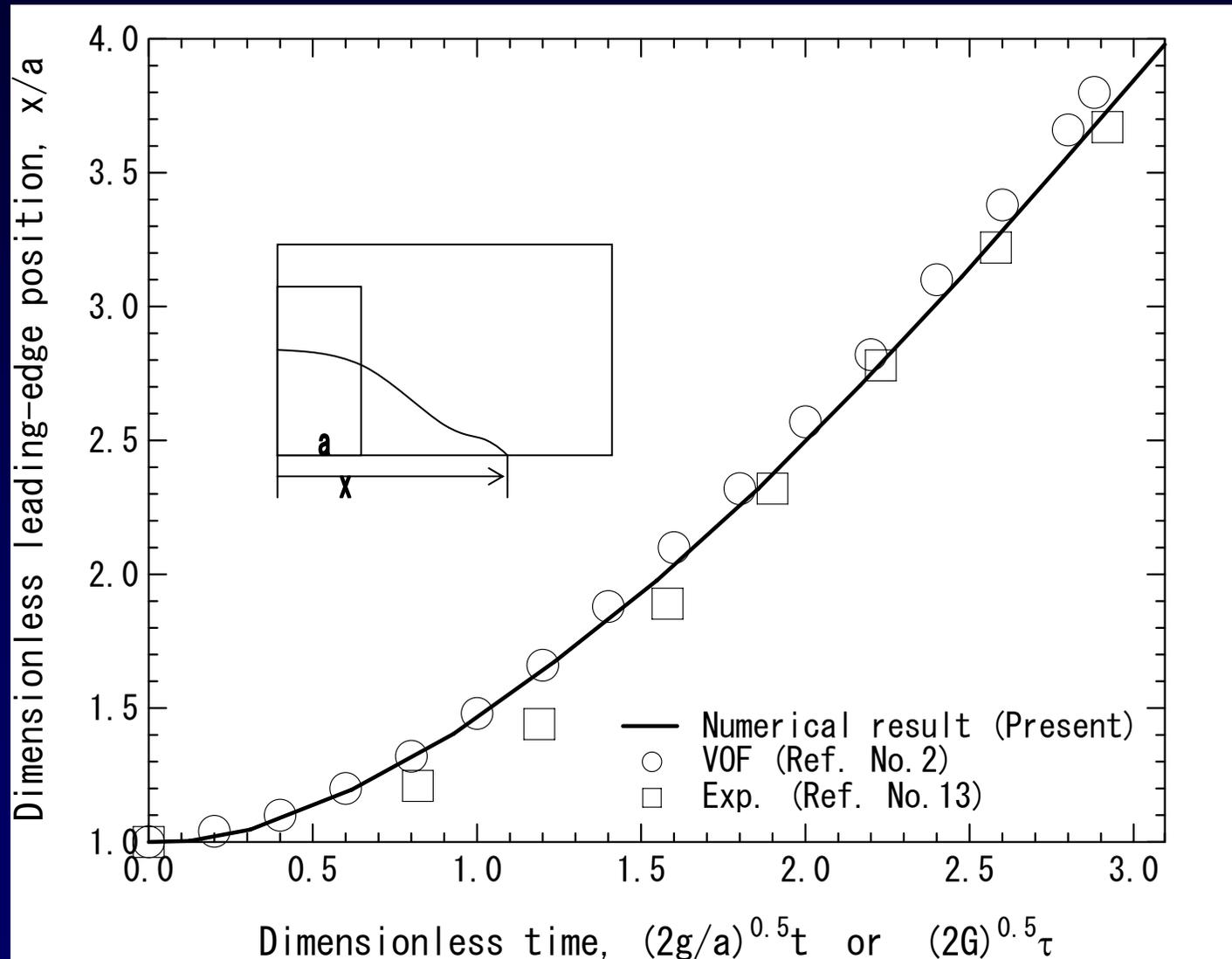
$\tau = 0.008$



$\tau = 0.01$

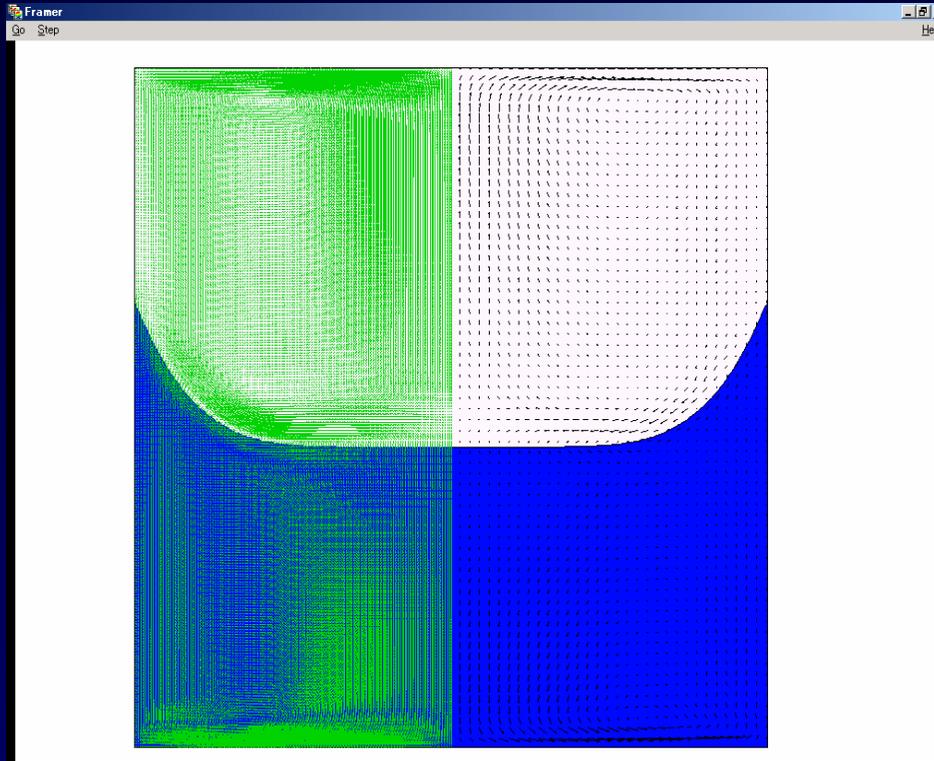
Collapse of a water column for $G = 2.45 \times 10^5$, $\Gamma = 9.00 \times 10^6$, density ratio = 800, and viscosity ratio = 50. The number of meshes is 200×125 .

Leading-edge location



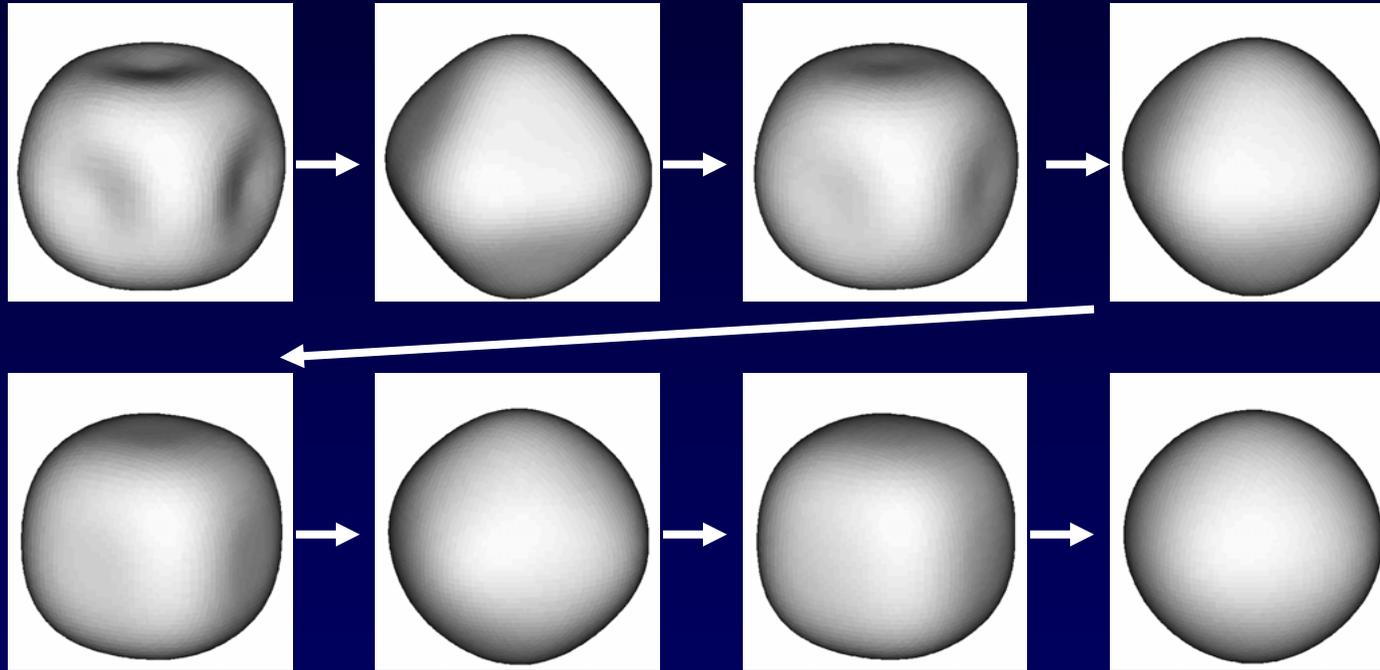
実際、 G だけではなく、 Γ の影響もあるはず

Spin-up from rest in a cylinder (Axisymmetric flow)



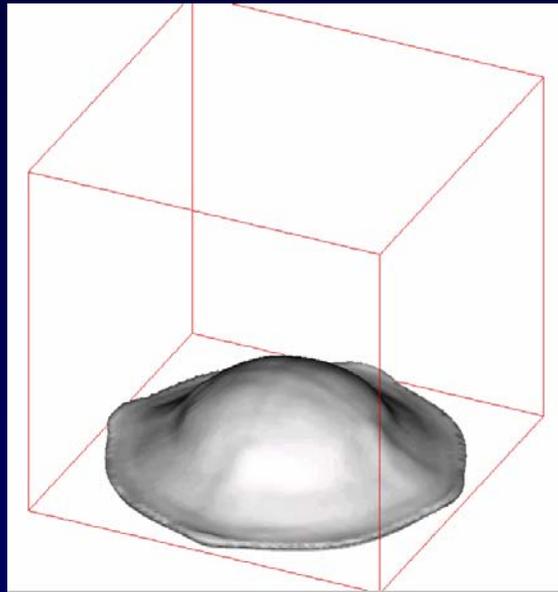
$E = 0.001$, $Ha = 0$, $Fr = 1.5$, $We = 0$, density ratio = 100, and viscosity ratio = 56. The number of meshes is 128×256 .

3D oscillating droplet

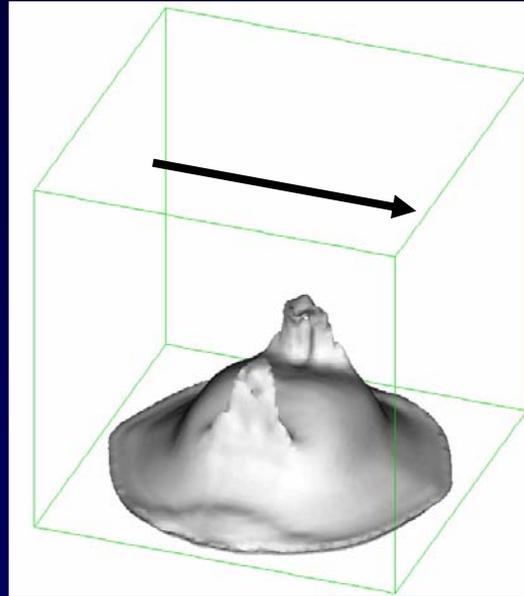


Attenuating oscillation of an initially cubic droplet for $G = 0$, $\Gamma = 5 \times 10^5$, density ratio = 100, and viscosity ratio = 10. The number of meshes is $80 \times 80 \times 80$.

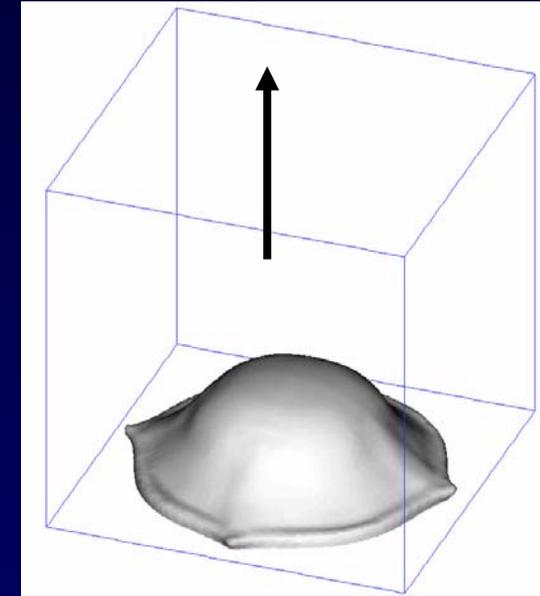
Effect of a magnetic field on a falling droplet



$Ha = 0$



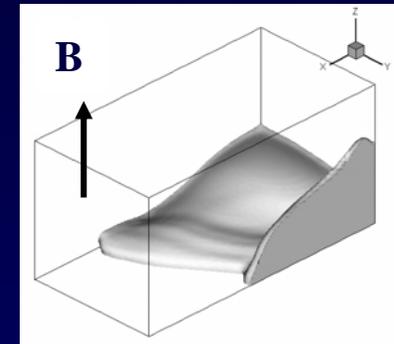
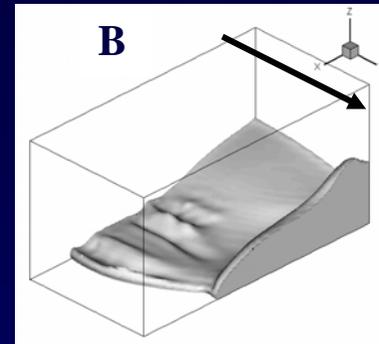
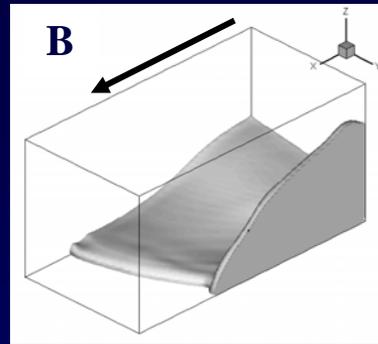
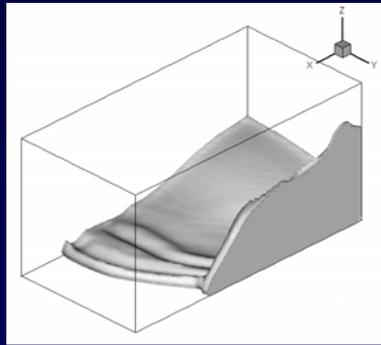
$Ha = 200$



$Ha = 200$

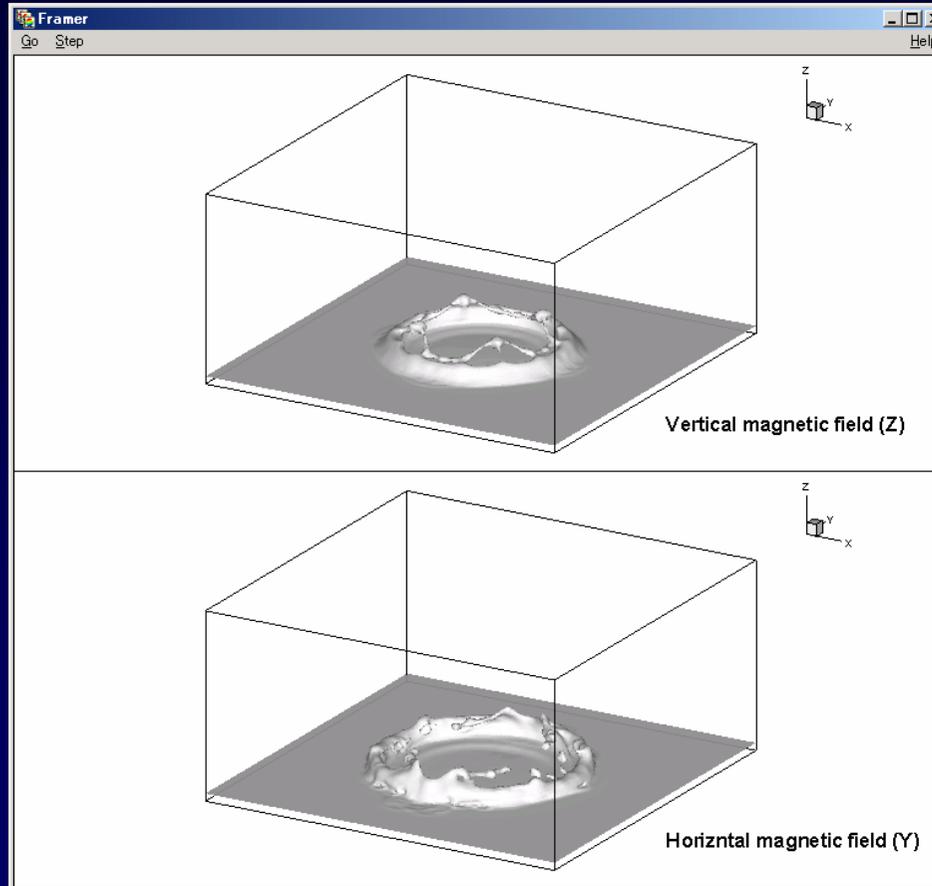
A falling droplet onto a flat wall for $G = 1 \times 10^6$, $\Gamma = 5 \times 10^5$, density ratio = 100, viscosity ratio = 10 and conductivity ratio = 0. A uniform magnetic field is imposed. The number of meshes is $80 \times 80 \times 80$.

Collapse of a liquid metal column in a uniform magnetic field



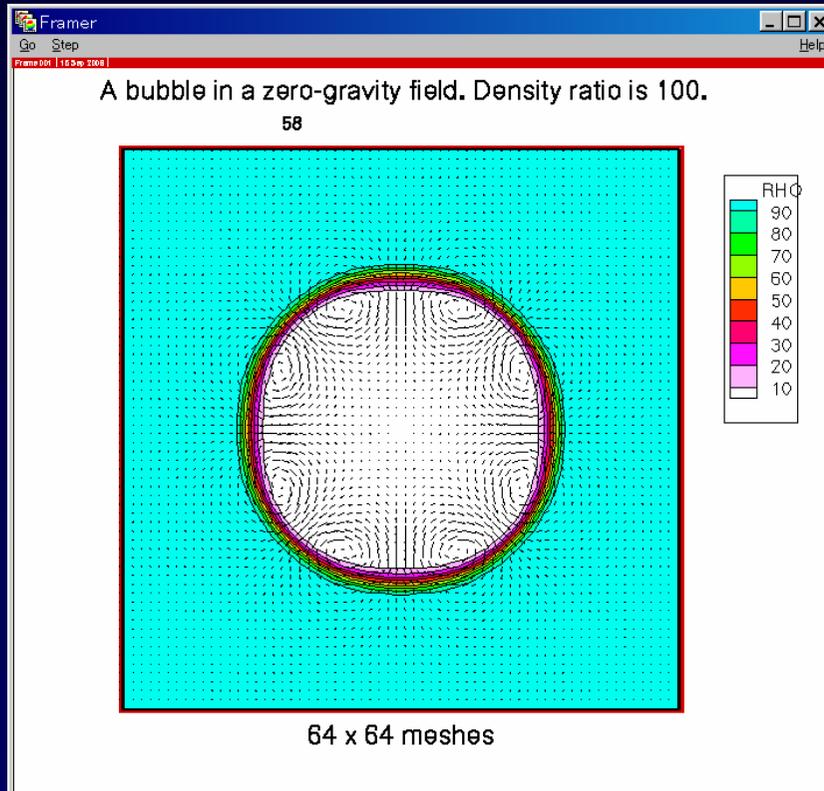
$Ha = 200$, $G = 1 \times 10^6$, $\Gamma = 1 \times 10^6$, density ratio = 800, viscosity ratio = 50 and conductivity ratio = 0. The number of meshes is $120 \times 60 \times 60$.

A falling droplet of liquid metal into a liquid layer under the influence of a magnetic field

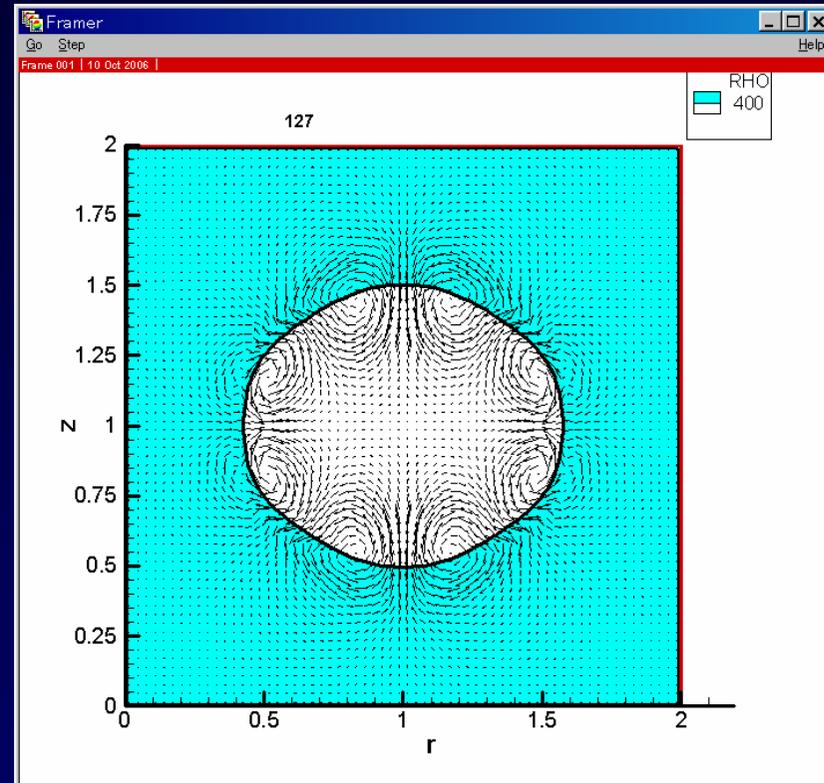


$Ha = 100$, $G = 1 \times 10^6$, $\Gamma = 5 \times 10^5$, density ratio = 100, viscosity ratio = 10 and conductivity ratio = 0. The number of meshes is $200 \times 200 \times 100$.

2D oscillating bubble

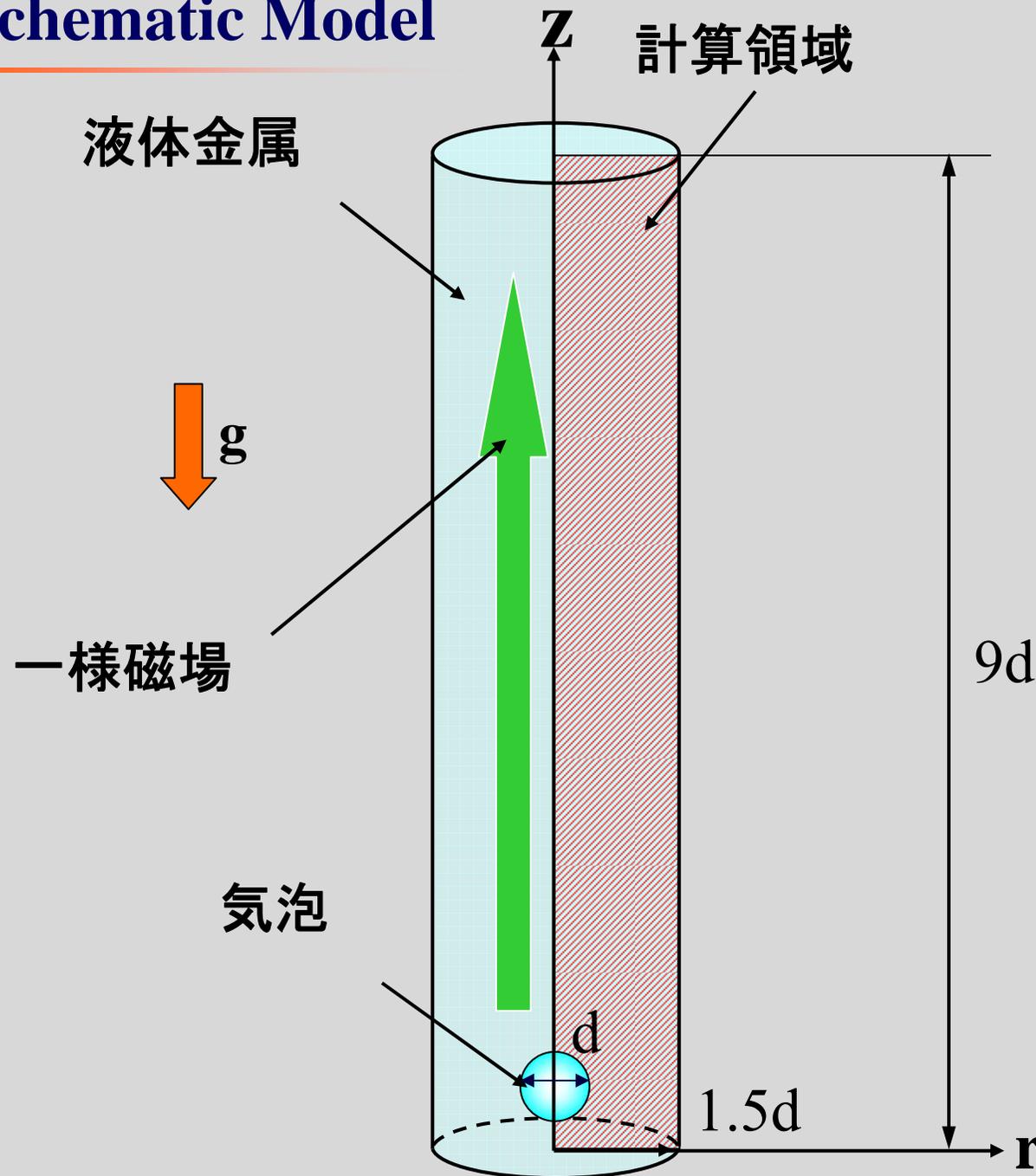


Two-dimensional oscillating bubble for $G = 0$, $\Gamma = 2 \times 10^6$, density ratio = 100, and viscosity ratio = 10. The vectors indicate velocity fields.



Two-dimensional oscillating bubble for $G = 0$, $\Gamma = 4 \times 10^6$, density ratio = 800, and viscosity ratio = 50. The vectors indicate velocity fields.

Schematic Model



Assumptions

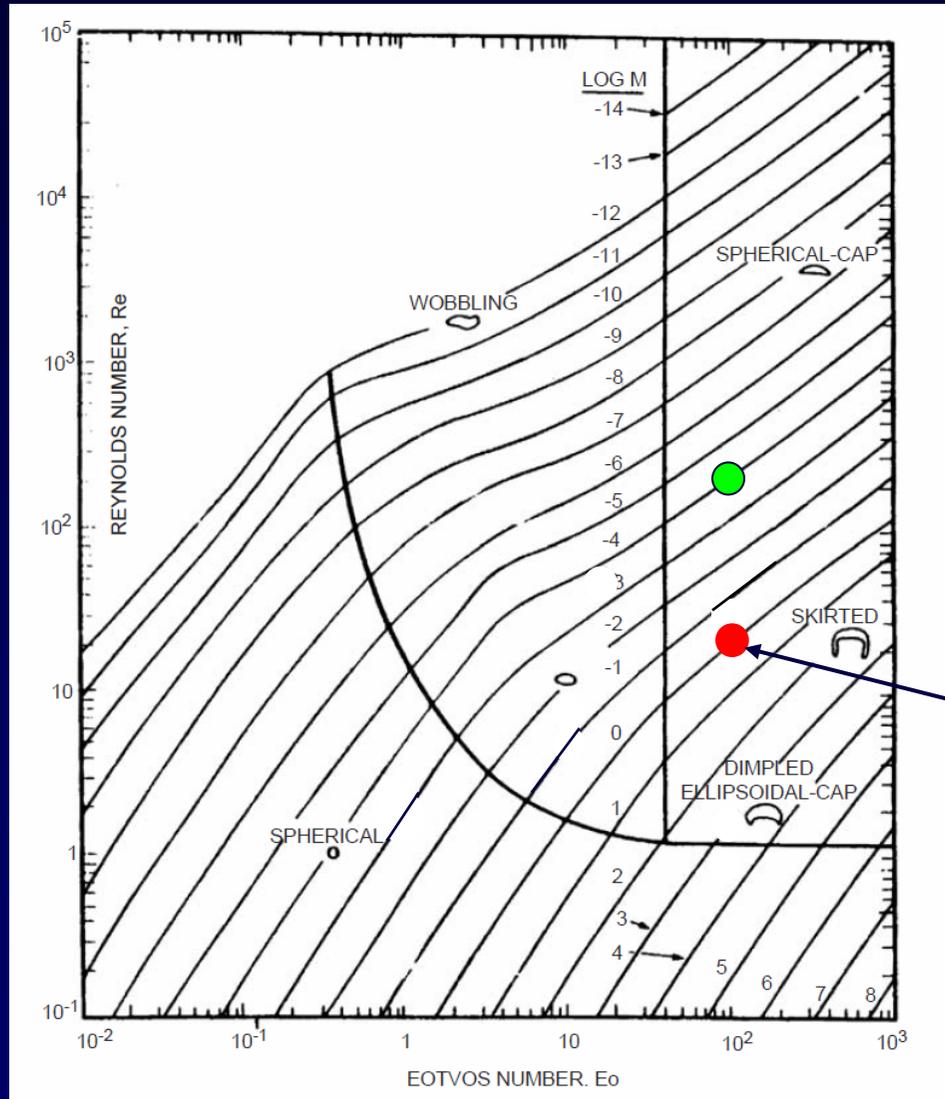
• *Incompressible, immiscible, Newtonian fluids*

• *Axisymmetric flow (Electric field is 0)*

(Conductivity of wall does not influence the current loop)

• *Isothermal state (Viscous dissipation and Joule heat are ignored)*

Bubble diagram of Grace for the shape and terminal rising velocity ($Ha = 0$)



$$M = \frac{g\mu_L^4\Delta\rho}{\rho_L^2\gamma^3}, \quad E_o = \frac{g\Delta\rho d_e^2}{\gamma}$$

$$Re = \frac{\rho_L u_\infty d_b}{\mu_L}$$

*Van Sint Annaland et al.
(VOF method)*

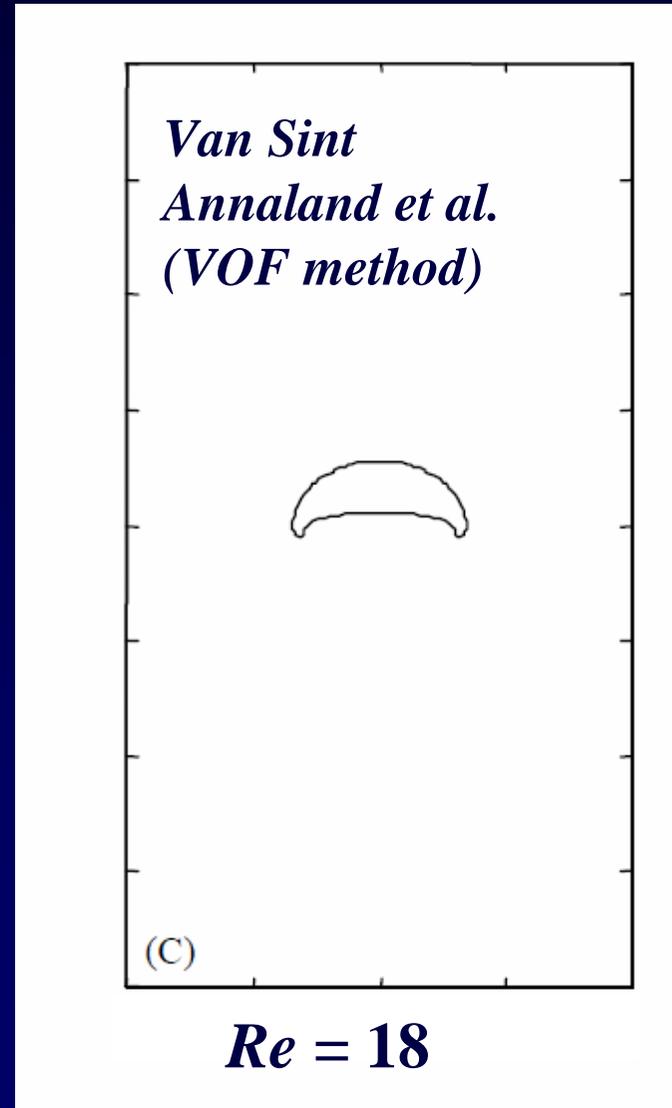
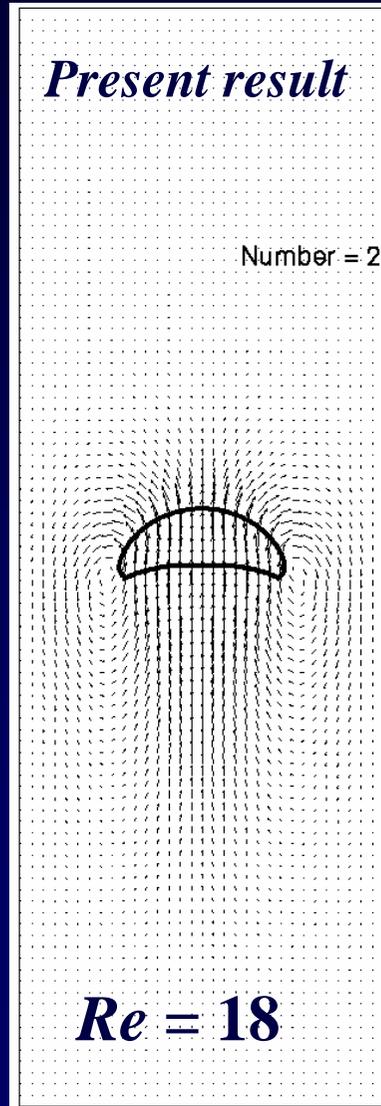
Chem. Eng. Sci. 60 (2005)

$$E_o = 97.1, M = 0.971$$

**Density ratio = 100,
Viscosity ratio = 100**

Validation of the numerical modeling ($Ha = 0$)

Comparison



$$Eo = 97.1, M = 0.971$$

Density ratio = 100,
Viscosity ratio = 100

$$Eo = \frac{G}{\Gamma} (\hat{\rho} - 1),$$

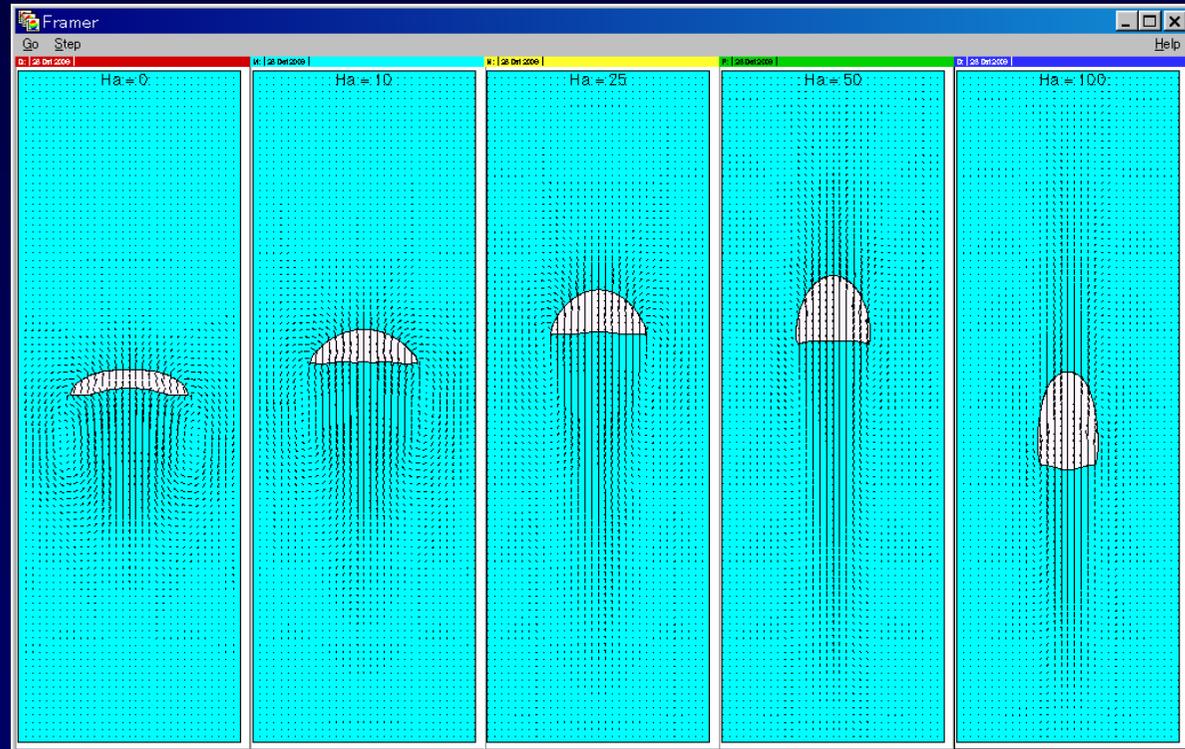
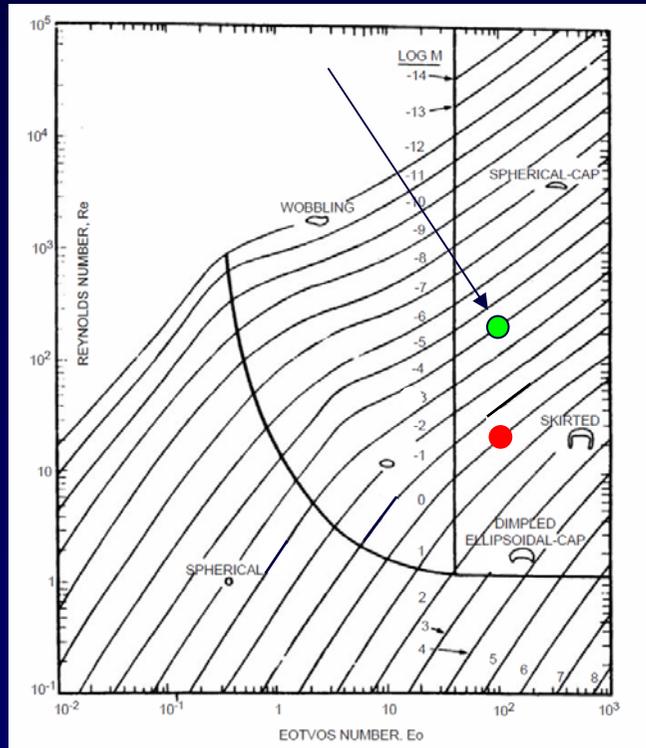
$$M = \frac{G}{\Gamma^3} \frac{1}{\hat{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\hat{\rho}} \right) \hat{\mu}^4$$

$$Re = W \frac{\hat{\rho}}{\hat{\mu}}$$

Numerical results (bubble shape & velocity vectors)

$$Eo = 10^2, M = 10^{-4}$$

Density ratio = 100, Viscosity ratio = 100

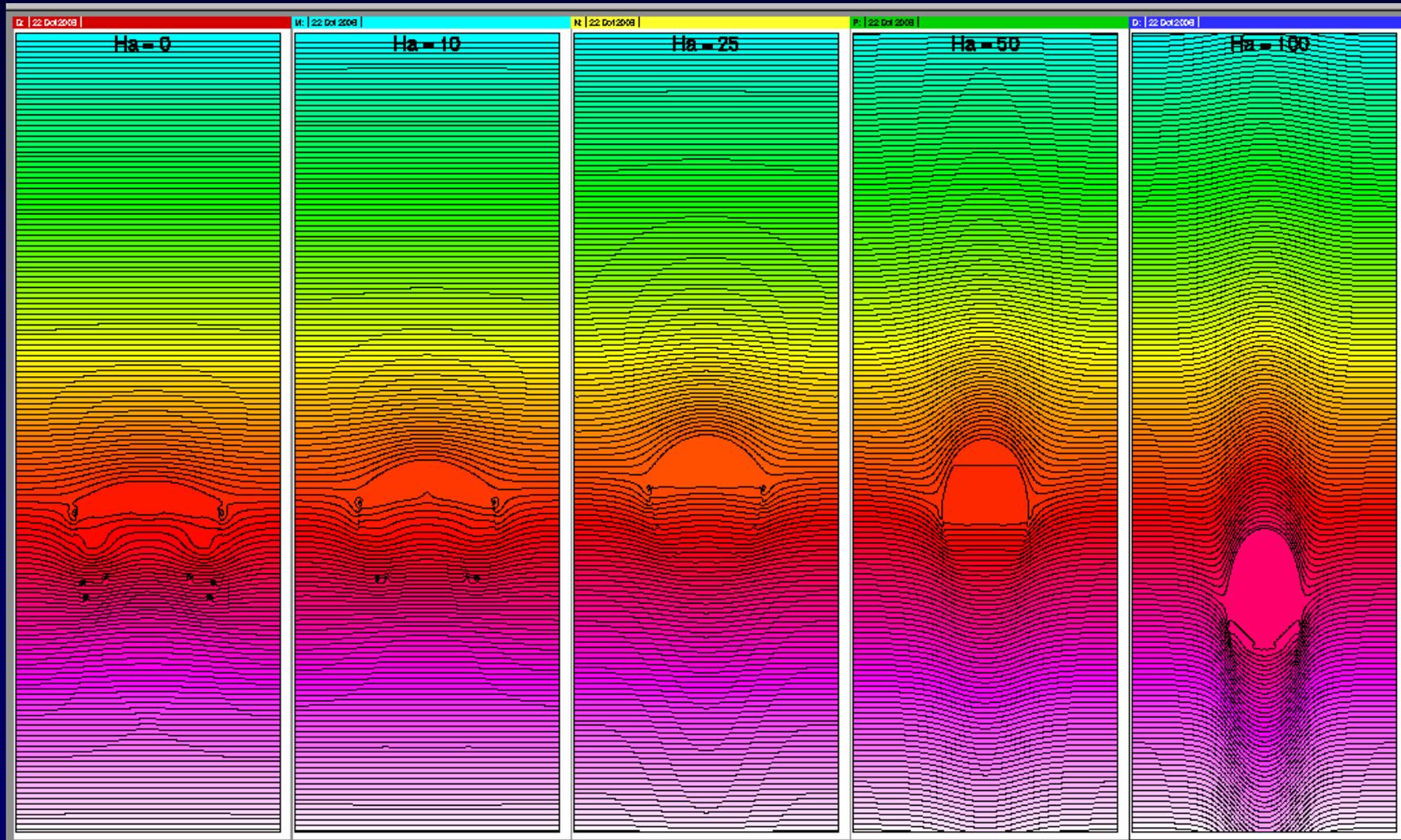


$Re = 265$
($Ha = 0$)

Numerical results (pressure)

$$Eo = 10^2, M = 10^{-4}$$

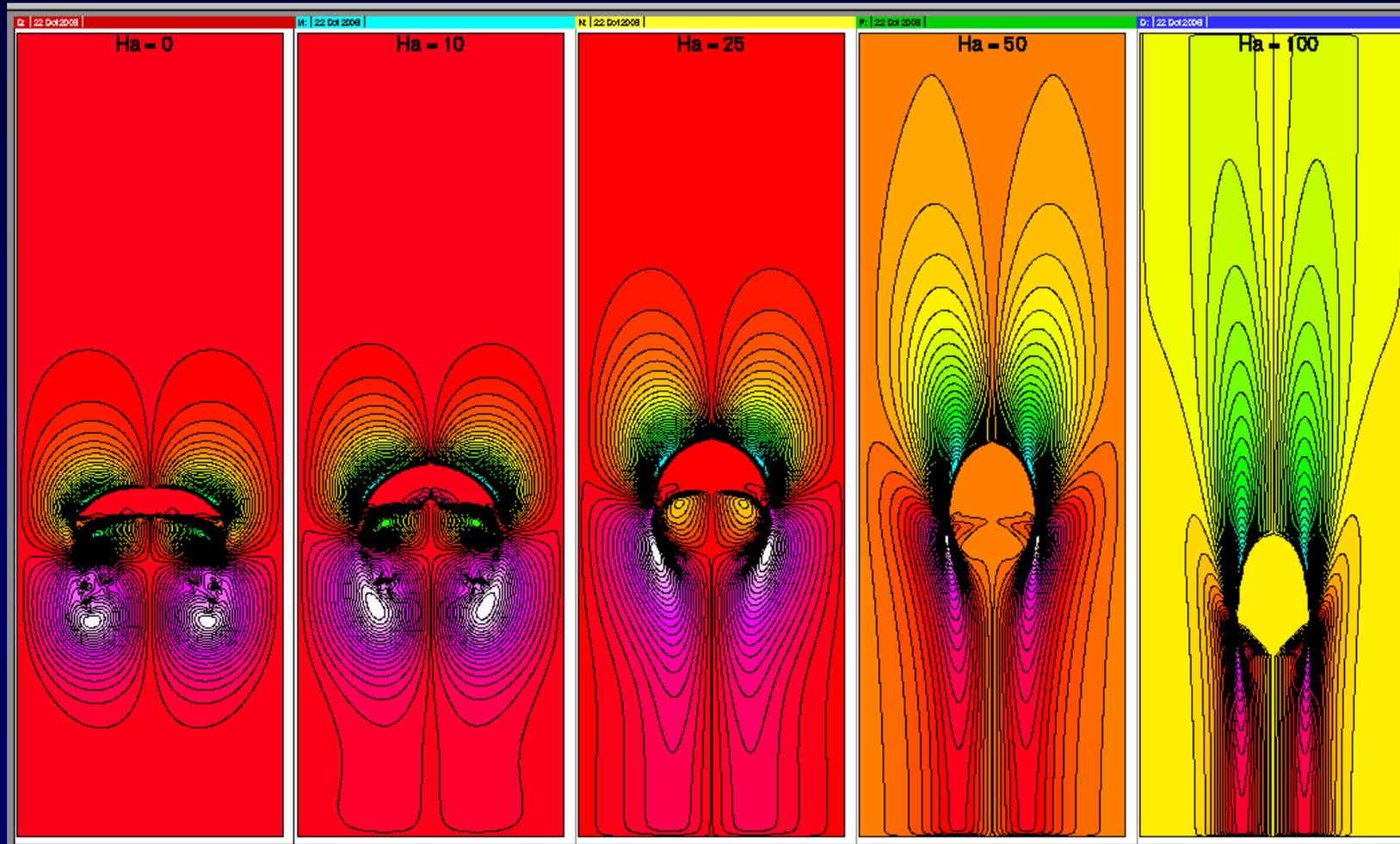
Density ratio = 100, Viscosity ratio = 100



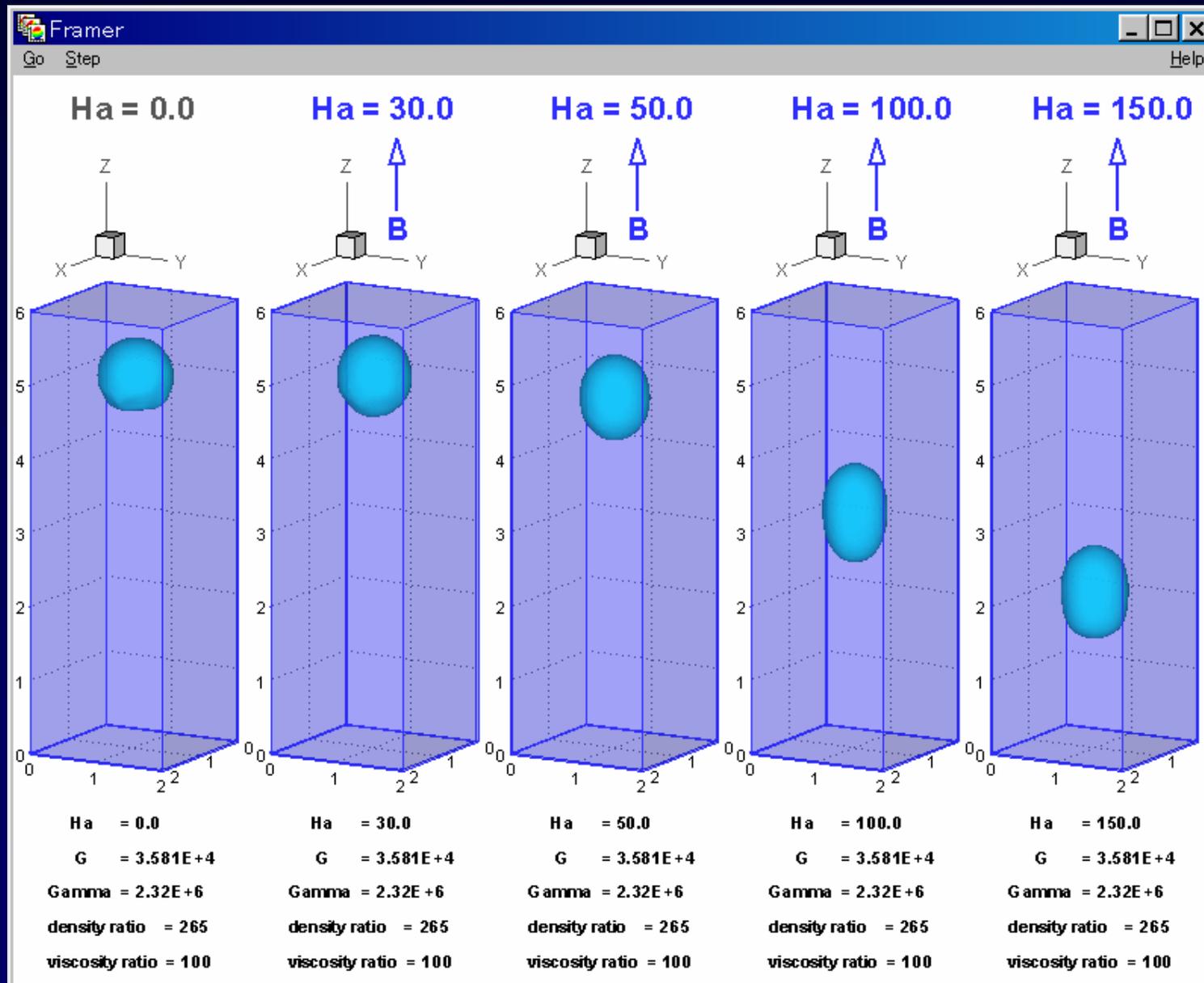
Numerical results (azimuthal electric current)

$$Eo = 10^2, M = 10^{-4}$$

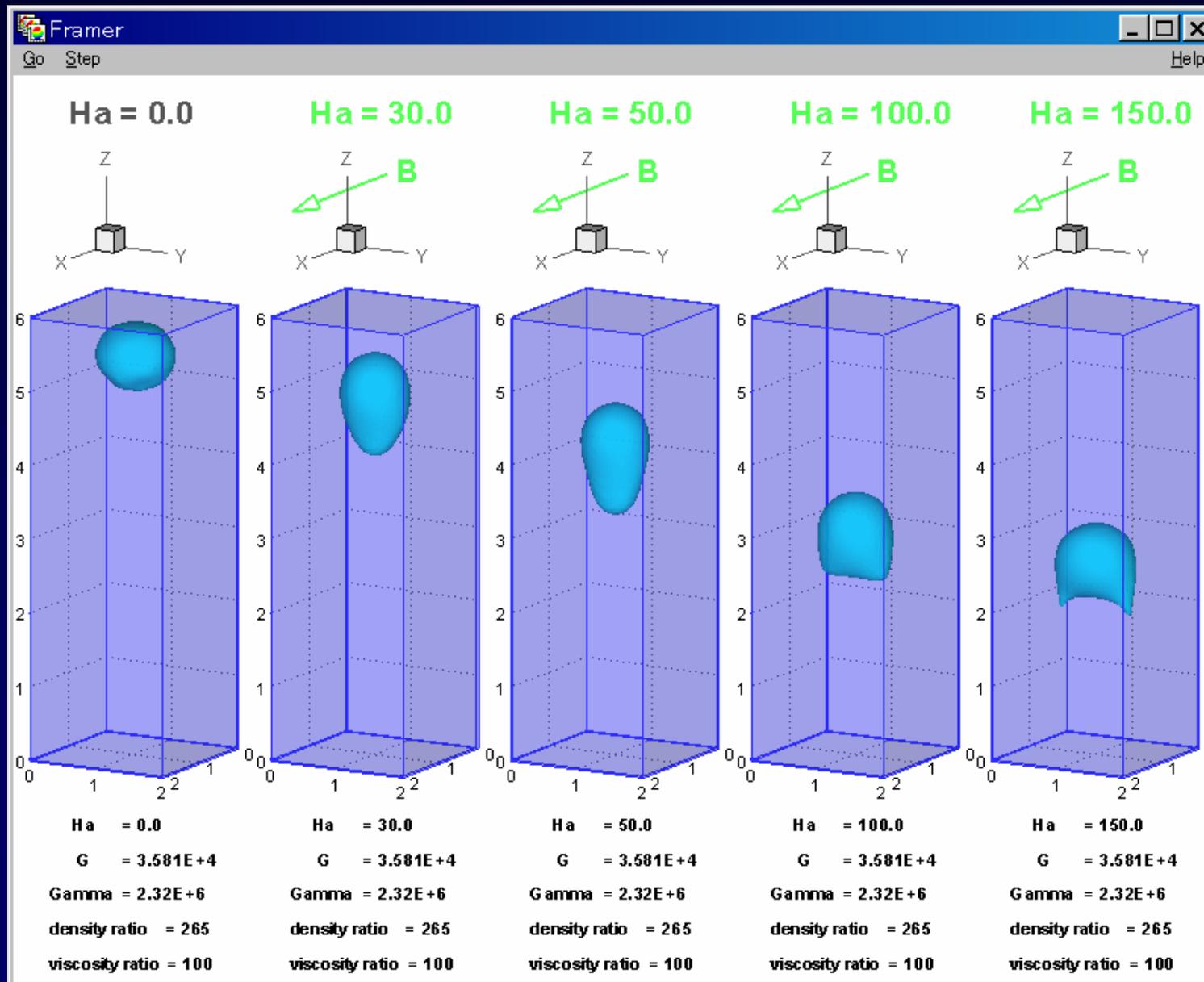
Density ratio = 100, Viscosity ratio = 100



3D numerical results (vertical mag.)

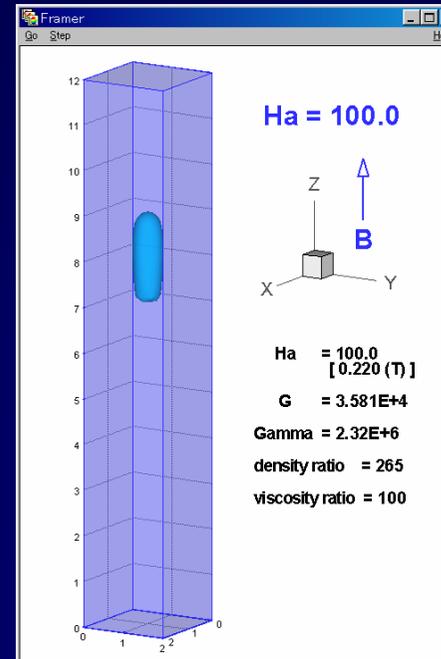
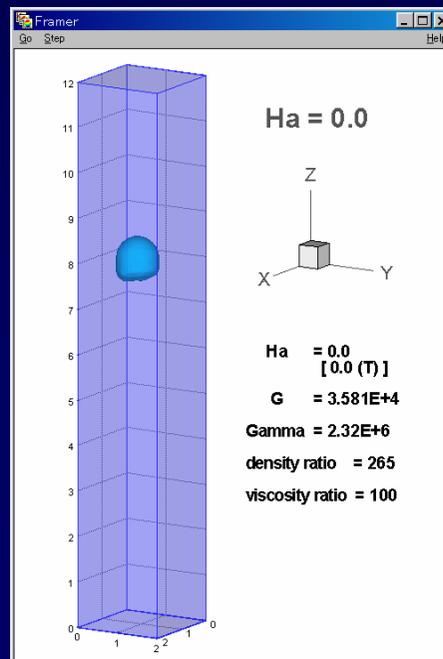


3D numerical results (horizontal mag.)



Summary for single rising bubble

- ❖ 縦磁場印加により、投影面積が小さくなり、場合によっては、磁場無しよりも速く上昇する。
- ❖ 縦磁場が印加されるとき、気泡の上下の液体もほぼ一緒に動く。
- ❖ 横磁場が印加されると、クロワッサン形状になることが予測される。



Conclusions

- ❖ CSFモデルとHSMAC法の組み合わせにより、比較的容易に、電磁流体の自由表面流れについて、ある程度高い密度比まで計算することができる。
- ❖ 重力駆動の液体金属の自由表面流れは、磁場の印加方向に依存して、対流が強く抑えられたり、流れ場が二次元的になったりする。これは、液体金属の自然対流に対する知見とほぼ同じである。
- ❖ 浮力駆動の単一気泡の上昇については、縦磁場印加で気泡が磁場方向に伸び、横磁場印加では、クロワッサンのような複雑な形状になることが予測できた。横磁場印加効果については、現象が複雑であり、今後さらなる検討が必要である。

Present problems to be resolved

- ❖ CSFモデルにおいては、動的な界面には問題ないと言えるが、静止した界面への適用は、不自然な挙動(界面が徐々に暴れだす)が顕在化する。これは、運動方程式において、速度をゼロとしたときに、圧力勾配項と界面法線力項(CSFモデル)がバランスしていないことに起因していると思われる
- ❖ 本計算モデルにおいては、界面の厚みを許しており、振動運動の場合には、各相の質量(体積)バランスは、比較的問題にならないが、並進運動の場合には、界面のぼやけと剥離から、各相の質量バランスは良いとは言えない。
- ❖ 密度比が大きい、液体金属—空気の二相流計算は難しい。気泡の計算では、静水圧による圧縮性を考慮する必要？
- ❖ 温度場が考慮されるとき、界面接線力(マランゴニ効果)をモデル化する必要がある、さらに各相において、温度に依存して密度が変化することも考慮する必要がある。